Aufgaben zu Parabeln

1.0 Die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel S und den auf ihr liegenden Punkten P und Q.
Ermitteln Sie jeweils die Werte der Formvariablen a, b und c.

1.1 a = 4; S(-2/-5)

1.2 c = -2; P(2/3); Q(-1/4)

1.3 a = 2; P(4/0); b = c

1.4 b = 2; S(3/5)

2.0 Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Parabeln gegebenenfalls in Abhängigkeit von a.

2.1 $y=\frac{1}{4}x^2-1$

2.2 $y=ax^2-2x \ (a\neq 0)$

2.3 $y=ax^2+2x-1{,}6 \ (a\neq 0)$

2.4 $y=-x^2+ax+3$

2.5 $y=3x^2-4x+2{,}5$

2.6 $y=2x^2+6x+4{,}5$

3.0 Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die die Koordinatenachsen in den Punkten schneidet.

3.1 A(0/-16), B(2/0) und C(-4/0)

3.2 A(0/-1), B(5/0) und C(-1/0)

4 Bestimmen Sie durch Rechnung t so, dass die Gerade g: $y = 4x + t$ eine Tangente an die Parabel mit der Gleichung p: $y = -x^2 - 4x + 1$ ist und berechnen Sie den Berührpunkt.

5.0 Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Funktionen gegebenenfalls in Abhängigkeit von a.

5.1 $p_1: y=x^2+2$ und $p_2: y=x^2-2x+5$

5.2 $p_1: y=x^2-3x$ und $p_2: y=-x^2+x+6$

5.3 $p_1: y=x^2+4x-1$ und $p_a: y=2x^2+x+2a^2$

5.4 $f_a: y=x^2-ax+4$ und $g: y=3x+4$

5.5 $f_a: y=ax^2-1 \ (a\neq 0)$ und $g: y=3$

5.6 $f_a: y=ax(ax-4) \ (a\neq 0)$ und $g: y=-4$

5.7 $f: y=-\frac{3}{2}x^2+2x$ und $g_a: y=-ax$

5.8 $f_a: y=2x^2+ax+2$ und $g_a: y=a(x+2)$

5.9 $f_a: y=2x^2+2ax-4a$ und $g_a: y=6x-0{,}5a^2$

5.10 $f_a: y=x^2+3ax-4a^2$ und $g_a: y=-x^2+x(a+6)$

6.0 Von einer quadratischen Funktion sind der Leitkoeffizient a und die Nullstellen bekannt. Geben Sie die Funktionsgleichung in der Produktform, der allgemeinen Form und der Scheitelpunktform an.

6.1 $a=1;\quad x_1=-1;\quad x_2=3$

6.2 $a=1{,}5;\quad x_1=1;\quad x_2=5$

6.3 $a=-2;\quad x_1=2;\quad x_2=2$

6.4 $a=\frac{2}{3};\quad x_1=1{,}5;\quad x_2=7{,}5$

7.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt.

7.1 Wenn die Nullstellen einer quadratischen Funktion sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, ist die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse.

7.2 Wenn die Parabel die x-Achse berührt, hat der Scheitelpunkt den x-Wert 0.

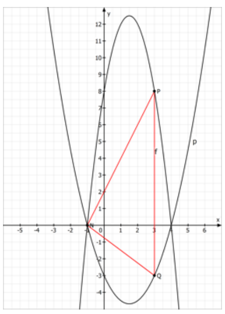
7.3 Wenn eine Parabel zwei Schnittpunkte mit der x-Achse hat und nach oben geöffnet ist, hat der Scheitelpunkt einen negativen y-Wert.

7.4 Wenn eine quadratische Funktion keine Nullstellen hat, lässt sich die Funktionsgleichung nicht in der Produktform angeben.

8.0 Gegeben sind die quadratische Funktion f mit $f(x)=-2x^2+6x+8$ und die quadratische Funktion p mit $p(x)=0{,}75x^2-2{,}25x-3$.

8.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der zugehörigen Parabeln.

8.2* Die Gerade g mit $g(x)=2x+2$ schneidet den Graphen von f im Punkt P. Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von p und hat die gleiche x-Koordinate wie der Punkt P.
Die Punkte N(-1/0), P und Q bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks.



8.3 Untersuchen Sie, um wie viel Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, damit er mit der Geraden g genau einen gemeinsamen Punkt hat.

9.0 Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $f_a(x) = ax^2 - a$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass der Punkt A(-2/-3) auf dem Graphen von f_a liegt.

9.2 Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f_a vom Parameter a unabhängig sind und folgern Sie aus der Lage der Nullstellen eine Aussage zur Lage des Scheitelpunktes der Parabel.

9.3 Bestätigen Sie durch Rechnung die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit von a.

9.4 Geben Sie den Wert des Parameters a für den Fall an, dass der Scheitelpunkt des Graphen von f_a bei (0/3) liegt.

9.5 Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von f_a und der Graph der linearen Funktion g mit $g(x) = -2x$ sich immer schneiden. Bestätigen Sie dies anschließend durch eine Rechnung.

9.6 Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die gegenseitige Lage des Graphen von f_a und des Graphen der linearen Funktion g mit $g(x) = x + 1$ und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des/der Berührpunkte(s) an.

10.0 Gegeben ist die Schar der Funktionen p_a mit $p_a(x) = ax^2 + (1+a)x + 1$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

10.1 Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a die Scharparabel nach unten geöffnet ist.

10.2 Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass p_a eine doppelte Nullstelle hat.

10.3 Berechnen Sie, für welchen Wert a der Scheitel der Scharparabel auf der y-Achse liegt.

10.4 Bestimmen Sie, für welchen Wert des Parameters a der Graph von p_a die Gerade g mit $g(x) = -x - 1$ berührt. Berechnen Sie dafür auch die Koordinaten des Berührpunktes.

10.5 Zeigen Sie, dass sich alle Parabeln der Schar an der Stelle x = 0 schneiden.

11 Gegeben sind die Funktionenscharen f_b und g_b durch $f_b(x) = -3x^2 + bx + 1$ und $g_b(x) = x^2 - 2x + b$ mit $b \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie b so, dass sich die Graphen von f_b und g_b berühren.

12.0 Gegeben ist die reelle Funktion f_k mit $f_k(x)=x^2-kx+3k$ und $k\in\mathbb{R}$.

12.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit von k.

12.2 Zeichnen Sie die Parabeln für $k\in\{-1;0;1;2\}$.

12.3 Bestimmen Sie den Zahlenbereich für k so, dass die zugehörigen Graphen keinen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse haben.

12.4 Zeigen Sie, dass sich alle Scharparabeln im Punkt A(3/9) schneiden.

12.5* Begründen Sie, dass sämtliche Scheitel der gegebenen Parabeln auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x)=-x^2+6x$ liegen.

13.0 Gegeben ist eine Parabelschar p_b mit $p_b(x)=-x^2+2bx-6x+6b-7$.

13.1 Stellen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit von b dar.

13.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel der Schar, die durch den Punkt B(-7/6) verläuft.

13.3 Die Parabel mit der Gleichung $y=-x^2-8x-13$ ist eine Parabel der Schar. Berechnen Sie den Wert, den die Formvariable b für diesen Fall hat.

13.4 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass alle Parabeln der Schar durch den Punkt A(-3/2) verlaufen.

13.5 Die Parabelschar enthält zwei Parabeln, welche die Gerade g mit der Gleichung $g(x)=3x+13{,}25$ berühren.
Ermitteln Sie die Gleichungen dieser Parabeln und die Koordinaten der Berührpunkte.

13.6* Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt P(-3/2) an die Parabel aus 13.3. Zeichnen Sie die Parabel und die Tangente in ein geeignetes Koordinatensystem.

14.0 Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a.

14.1 Stellen Sie die Funktionsgleichung von f_a auf, wenn sie Nullstellen bei x = -2 und x = a hat und ihr Graph kongruent ist zur nach unten geöffneten Normalparabel.

14.2 Ermitteln Sie allein mit den Angaben in Teilaufgabe 14.1 die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit vom Parameter a.
Geben Sie dann die Gleichung der Funktion in der Scheitelpunktform und in der allgemeinen Form an.
(Teilergebnis: $f_a(x)=-x^2+(a-2)x+2a$)

14.3 Bestimmen Sie alle Werte des Parameters a so, dass die zugehörige Parabel nicht durch den I. Quadranten verläuft.

14.4 Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die gegenseitige Lage des Graphen von f_a und des Graphen der linearen Funktion g mit $g(x) = -0{,}5x$ und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des/der Berührpunkte(s) an.

15.0 Gegeben ist die reelle Funktion f_k mit $f_k(x) = (k-1)x^2 - 2kx + k + 3$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

15.1 Ermitteln Sie den Wert des Parameters k so, dass der zugehörige Graph durch den Ursprung verläuft.

15.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k.

16 Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(2|2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Die zugehörige quadratische Funktion $p_k : x \mapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Bestimmen Sie alle Werte von k, sodass die Parabel die x-Achse genau zweimal schneidet. (Abitur 2022 Teil1)

Lösungen

1.1 $y=4x^2+bx+c$

$y=4(x+2)^2-5=4(x^2+4x+4)-5=4x^2+16x+16-5=4x^2+16x+11$

$\Rightarrow b=16 \qquad c=11$

1.2 $y=ax^2+bx-2$

$P(2/3)\Rightarrow 3=4a+2b-2 \Rightarrow 5=4a+2b$

$Q(-1/4)\Rightarrow 4=a-b-2 \Rightarrow 6=a-b$

(I) $5=4a+2b$

(II) $6=a-b \qquad \Rightarrow a=6+b$

$a=6+b$ in (I): $5=4(6+b)+2b \quad \Rightarrow 5=24+4b+2b \Rightarrow 6b=-19$

$\Rightarrow b=-\frac{19}{6}$

$\Rightarrow a=6-\frac{19}{6}=\frac{17}{6}$

1.3 $y=2x^2+bx+b$

$P(0/4)\Rightarrow 0=2\cdot 16+4b+b \Rightarrow 0=32+5b \Rightarrow b=-\frac{32}{5}=-6,4=c$

1.4 $y=a(x-3)^2+5 \quad \Rightarrow y=a(x^2-6x+9)+5 \Rightarrow y=ax^2-6ax+9a+5$

$\Rightarrow -6a=2 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow c=9\cdot(-\frac{1}{3}+5)=-3+5=2$

2.1 $N_1(2/0)$ und $N_2(-2/0)$

2.2 $N_1(0/0)$ und $N_2(\frac{2}{a}/0)$

2.3 $x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot a\cdot(-1,6)}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4+6,4a}}{2a}$

$4+6,4a>0 \Rightarrow a>-0,625$ (außer $a=0$) $\Rightarrow$ zwei Nullstellen

$4+6,4a=0 \Rightarrow a=-0,625 \Rightarrow$ eine Nullstelle

$4+6,4a<0 \Rightarrow a<-0,625 \Rightarrow$ keine Nullstelle

2.4 $x_{1/2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{-2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+12}}{-2}$

$a^2 + 12$ ist für alle a größer Null, also hat die Parabel für alle a zwei Nullstellen.

2.5 keine Nullstellen f) $N(-\frac{3}{2}/0)$

3.1 Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$ und dann die Punkte A,B und C einsetzen

(I) $-16 = c$

(II) $0 = 4a + 2b + c$

(III) $0 = 16a - 4b + c$

$\Rightarrow$ a = 2 und b = 4 $\Rightarrow y = 2x^2 + 4x - 16$

3.2 gleicher Ansatz wie bei 3.1

$$\Rightarrow \; y=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x-1$$

4. Gleichsetzen der Geraden und der Parabel $\Rightarrow$

$$-x^2-4x+1=4x+t$$

$$-x^2-8x+1-t=0$$

$$x_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-1)\cdot(1-t)}}{-2}=\frac{8\pm\sqrt{68-4t}}{-2}$$

Tangente $\Rightarrow 68-4t=0 \Rightarrow t=17$

$\Rightarrow$ Berührpunkt B(-4/1)

5.1 Ein Schnittpunkt: S(1,5/4,25)

5.2 Zwei Schnittpunkte: $S_1(-1/4)$ und $S_2(3/0)$

5.3 $$x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot(-1)\cdot(-1-2a^2)}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{5-8a^2}}{-2}$$

$5-8a^2>0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{5}{8}}<a<\sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow$ zwei gemeinsame Punkte

$5-8a^2=0 \Rightarrow a=-\sqrt{\frac{5}{8}}$ und $a=\sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow$ ein gemeinsamer Punkt

$5-8a^2<0 \Rightarrow a<-\sqrt{\frac{5}{8}}$ und $a>\sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow$ kein gemeinsamer Punkt

5.4

$x^2-ax+4=3x+4 \;\Rightarrow x^2-ax-3x=0 \;\Rightarrow x(x-a-3)=0$

$\Rightarrow x_1=0 \quad x-a-3=0 \Rightarrow x_2=a+3$

$a=-3$: ein gemeinsamer Punkt bei x=0

$a\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$: zwei gemeinsame Punkte bei x_1=0 und x_2=a+3

5.5

$ax^2-1=3 \;\Rightarrow ax^2-4=0 \;\Rightarrow x^2=\frac{4}{a}$

$\Rightarrow$ zwei gemeinsame Punkte für alle $a\in R$ bei $x_1=\sqrt{\frac{4}{a}}$ und $x_2=-\sqrt{\frac{4}{a}}$

5.6

$$ax(ax-4)=-4 \;\Rightarrow a^2x^2-4ax+4=0$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-4\cdot a^2\cdot 4}}{2a^2}=\frac{4a\pm\sqrt{0}}{2a^2}=\frac{2}{a}$$

$\Rightarrow$ ein gemeinsamer Punkt für alle $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ bei $x=\frac{2}{a}$

5.7

$$-\frac{3}{2}x^2+2x=-ax \;\Rightarrow -\frac{3}{2}x^2+2x+ax=0 \;\Rightarrow x(-\frac{3}{2}x+2+a)=0$$

$$x_1=0 \quad -\frac{3}{2}x+2+a=0 \;\Rightarrow x_2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}a$$

$a=-2$: ein gemeinsamer Punkt bei x=0

$a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$: zwei gemeinsame Punkte bei $x_1=0$ und $x_2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}a$

5.8

$$2x^2+ax+2=a(x+2) \;\Rightarrow 2x^2+ax+2=ax+2a \;\Rightarrow 2x^2+2-2a=0 \;\Rightarrow x^2=a-1$$

ein gemeinsamer Punkt, wenn a-1=0 $\Rightarrow a=1$ $(x=0)$

zwei gemeinsame Punkte, wenn a-1>0 $\Rightarrow$ a>1 $(x_1=\sqrt{a-1} \quad x_2=-\sqrt{a-1})$

kein gemeinsamer Punkt, wenn a-1<0 $\Rightarrow$ a<1

5.9

$$2x^2+2ax-4a=6x-0{,}5a^2 \;\Rightarrow 2x^2+(2a-6)x-4a+0{,}5a^2=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-(2a-6)\pm\sqrt{(2a-6)^2-4\cdot 2\cdot(-4a+0{,}5a^2)}}{4}=$$

$$=\frac{-(2a-6)\pm\sqrt{4a^2-24a+36+32a-4a^2}}{4}=\frac{-(2a-6)\pm\sqrt{8a+36}}{4}$$

ein gemeinsamer Punkt, wenn 8a+36=0 $\Rightarrow$ a=-4,5 $\left(x=\frac{-(2\cdot(-4{,}5)-6)}{4}=3{,}75\right)$

zwei gemeinsame Punkte, wenn 8a+36>0

Skizze:

$$\Rightarrow a\in\,]-4{,}5;\infty[\quad \left(x_1=\frac{-(2a-6)+\sqrt{8a+36}}{4} \text{ und } x_2=\frac{-(2a-6)-\sqrt{8a+36}}{4}\right)$$

kein gemeinsamer Punkt, wenn 8a+36<0

$$\Rightarrow a\in\,]-\infty;-4{,}5[$$

5.10

$x^2+3ax-4a^2=-x^2+ax+6x \quad \Rightarrow 2x^2+(2a-6)x-4a^2=0$

$$x_{1/2}=\frac{-(2a-6)\pm\sqrt{(2a-6)^2-4\cdot2\cdot(-4a^2)}}{4}=$$

$$=\frac{-(2a-6)\pm\sqrt{4a^2-24a+36+32a^2}}{4}=\frac{-(2a-6)\pm\sqrt{36a^2-24a+36}}{4}$$

ein gemeinsamer Punkt, wenn $36a^2-24a+36=0 \quad \Rightarrow a_{1/2}=\dfrac{24\pm\sqrt{576-4\cdot36\cdot36}}{6}$

Skizze:

$\Rightarrow$ Diskriminante ist für alle $a\in R$ positiv

$\Rightarrow$ die Parabeln haben für alle $a\in R$ zwei gemeinsame Punkte

6.1 $y=(x+1)(x-3) \qquad y=x^2-2x-3 \qquad y=(x-1)^2-4$

6.2 $y=1{,}5(x-1)(x-5) \qquad y=1{,}5x^2-9x+7{,}5 \qquad y=1{,}5(x-3)^2-6$

6.3 $y=-2(x-2)(x-2)=-2(x-2)^2 \qquad y=-2x^2-8x-8 \qquad y=-2(x-2)^2$

6.4 $y=\frac{2}{3}(x-1{,}5)(x-7{,}5) \qquad y=\frac{2}{3}x^2-6x+7{,}5 \qquad y=\frac{2}{3}(x-4{,}5)^2-6$

7.1 Richtig.

7.2 Falsch, $y=(x-1)^2$ berührt die x-Achse und der Scheitlepunkt hat den x-Wert 1.

7.3 Richtig.

7.4 Richtig.

8.1

$-2x^2+6x+8=0{,}75x^2-2{,}25x-3 \quad \Rightarrow -2{,}75x^2+8{,}25x+11=0$

$\Rightarrow x_1=-1{,}04 \quad x_2=4{,}71$

$y_1=-0{,}40 \quad \Rightarrow S_1(-1{,}04/-0{,}40)$

$y_2=-8{,}11 \quad \Rightarrow S_2(4{,}71/-8{,}11)$

8.2

$-2x^2+6x+8=2x+2 \Rightarrow -2x^2+4x+6=0$

$\Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=3$

$\Rightarrow y_1=0 \quad y_2=8 \qquad \Rightarrow SP_1(-1/0) \quad P(3/8)$

$\Rightarrow Q(3/p(3)) \quad \Rightarrow Q(3/-3)$

$A_{\text{Dreieck}}=\frac{1}{2}\cdot(3-(-1))\cdot(8-(-3))=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 11=22$

8.3

$-2x^2+6x+t=2x+2 \Rightarrow -2x^2+4x+t-2=0$

$D=16-4(-2)(t-2)=8t \quad \Rightarrow 8t=0 \quad \Rightarrow t=0$

Der Graph von f müsste um 8 Einheiten nach unten verschoben werden.

9.1 $a(-2)^2-a=-3 \Rightarrow 3a=-3 \Rightarrow a=-1$

9.2

$ax^2-a=0 \quad \Rightarrow x^2=1 \quad \Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$ unabhängig von a

Der Scheitelpunkt muss damit auf der y-Achse liegen.

9.3 $x_s=-\frac{0}{2a}=0 \quad y_s=a\cdot 0^2-a=-a \quad \Rightarrow S(0/-a)$

9.4 $a=-3$

9.5

Die Gerade g ist eine Ursprungsgerade mit negtiver Steigung

Wenn a > 0, dann ist f eine nach oben geöffnete Parabel und der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse und auf der y-Achse.

Wenn a < 0, dann ist f eine nach unten geöffnete Parabel und der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse und auf der y-Achse.

$ax^2-a=-2x \quad \Rightarrow ax^2+2x-a=0$

$\Rightarrow D=4-4a(-a)=4+4a^2>0$ für alle $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ Parabel und Gerade haben immer zwei Schnittpunkte

9.6

$$ax^2 - a = x + 1 \quad \Rightarrow ax^2 - x - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot a \cdot (-a-1)}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2 + 4a + 1}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(2a+1)^2}}{2a}$$

1) $2a + 1 = 0 \quad \Rightarrow a = -0{,}5$

$$\Rightarrow \text{ein gemeinsamer Punkt} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2 \cdot (-0{,}5)} = -1 \quad \Rightarrow BP(-1|0)$$

2) $2a + 1 > 0 \quad \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\} \quad \Rightarrow$ zwei gemeinsame Punkte

10.1 $a < 0$

10.2

$$ax^2 + (1+a)x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow D = (1+a)^2 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

$$\Rightarrow D = 0 \quad \Rightarrow a = 1$$

10.3 $x_S = -\frac{1+a}{2a} = 0 \quad \Rightarrow 1 + a = 0 \quad \Rightarrow a = -1$

10.4

$$ax^2 + (1+a)x + 1 = -x - 1 \quad \Rightarrow ax^2 + (2+a)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow D = (2+a)^2 - 4a \cdot 2 = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$$

$$\Rightarrow D = 0 \quad \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4}{4} = -1 \quad y = -(-1) - 1 = 0 \quad \Rightarrow BP(-1/0)$$

10.5

$$y = a \cdot 0^2 + (1+a) \cdot 0 + 1 = 1$$

$\Rightarrow$ alle Parabeln gehen durch den Punkt P(0/1)

11.

$$-3x^2 + bx + 1 = x^2 - 2x + b \quad \Rightarrow -4x^2 + (b+2)x + 1 - b = 0$$

$$\Rightarrow D = (b+2)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (1-b) = b^2 + 4b + 4 + 16 - 16b = b^2 - 12b + 20$$

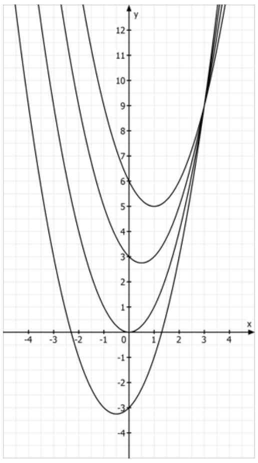
$$\Rightarrow D = 0 \quad \Rightarrow b^2 - 12b + 20 = 0 \quad \Rightarrow b_1 = 10 \quad b_2 = 2$$

12.1

$$x_S = -\frac{-k}{2} = \frac{1}{2}k$$

$$y_S = \left(\frac{1}{2}k\right)^2 - k \cdot \frac{1}{2}k + 3k = -\frac{1}{4}k^2 + 3k \quad \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}k / -\frac{1}{4}k^2 + 3k\right)$$

12.2



12.3

$x^2 - kx + 3k = 0$

$\Rightarrow D = k^2 - 12k$

$\Rightarrow k^2 - 12k = 0 \quad \Rightarrow k_1 = 0 \quad k_2 = 12$

Skizze von $k^2 - 12k$:

$\Rightarrow k \in \left]0;12\right[$

12.4

$y = 3^2 - 3k + 3k = 9$

$\Rightarrow$ alle Scharparabeln haben den Punkt (3/9) gemeinsam

12.5

$S\left(\frac{1}{2}k \,/\, -\frac{1}{4}k^2 + 3k\right)$

$x = \frac{1}{2}k \qquad \Rightarrow k = 2x$

$y = -\frac{1}{4}k^2 + 3k$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}(2x)^2 + 3 \cdot 2x = -x^2 + 6x$

13.1

$$x_S = -\frac{2b-6}{-2} = b-3$$
$$y_S = -(b-3)^2 + 2b(b-3) - 6(b-3) + 6b - 7 =$$
$$= -b^2 + 6b - 9 + 2b^2 - 6b - 6b + 18 + 6b - 7 = b^2 + 2$$
$$\Rightarrow S(b-3 / b^2 + 2)$$

13.2

$$-(-7)^2 + 2b(-7) - 6(-7) + 6b - 7 = 6$$
$$-49 - 14b + 42 + 6b - 7 = 6 \quad \Rightarrow -8b - 14 = 6 \quad \Rightarrow b = -2{,}5$$
$$\Rightarrow p_{-2,5}(x) = -x^2 - 11x - 22$$

13.3

$$\text{(I)}\ \ 2b - 6 = -8 \quad \Rightarrow b = -1$$
$$\text{(II)}\ 6b - 7 = -13 \quad \Rightarrow b = -1$$

13.4

$$-(-3)^2 + 2b(-3) - 6(-3) + 6b - 7 = -9 - 6b + 18 + 6b - 7 = 2$$

$\Rightarrow$ alle Scharparabeln haben den Punkt (-3/2) gemeinsam

13.5

$$-x^2 + 2bx - 6x + 6b - 7 = 3x + 13{,}25 \qquad \Rightarrow -x^2 + 2bx - 9x + 6b - 20{,}25 = 0$$
$$\Rightarrow D = (2b-9)^2 - 4\left(-1\right)\left(6b - 20{,}25\right) = 4b^2 - 36b + 81 + 24b - 81 = 4b^2 - 12b$$
$$\Rightarrow 4b^2 - 12b = 0 \quad \Rightarrow b_1 = 0 \quad b_2 = 3$$
$$\Rightarrow p_0(x) = -x^2 - 6x - 7 \qquad BP(-4{,}5 / -0{,}25)$$
$$\Rightarrow p_1(x) = -x^2 + 11 \qquad BP(-1{,}5 / 8{,}75)$$

13.6

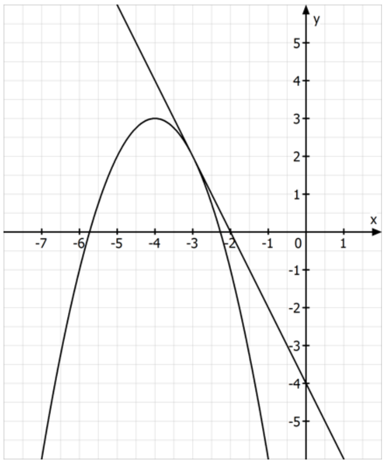
$t: y = mx + t \quad \Rightarrow 2 = -3m + t \quad \Rightarrow t = 2 + 3m \quad \Rightarrow y = mx + 2 + 3m$

$-x^2 - 8x - 13 = mx + 2 + 3m \quad \Rightarrow -x^2 - 8x - mx - 15 - 3m = 0$

$\Rightarrow D = (-8-m)^2 - 4(-1)(-15-3m) = 64 + 16m + m^2 - 60 - 12m = m^2 + 4m + 4$

$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \quad \Rightarrow m = -2$

$\Rightarrow t: y = -2x - 4$



14.1 $f_a(x) = -(x+2)(x-a) = -x^2 - 2x + ax + 2a$

14.2

$$x_S = \frac{-2+a}{2} = -1 + \frac{1}{2}a$$

$$y_S = -(-1 + \frac{1}{2}a + 2)(-1 + \frac{1}{2}a - a) = -(1 + \frac{1}{2}a)(-1 - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a^2 + a + 1$$

$$\Rightarrow S\left(-1 + \frac{1}{2}a \,/\, \frac{1}{4}a^2 + a + 1\right)$$

$$\Rightarrow f_a(x) = -\left(x + 1 - \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}a^2 + a + 1$$

$$\Rightarrow f_a(x) = -x^2 - 2x + ax + 2a$$

14.3 Die Parabel darf keine positive Nullstelle haben $\quad \Rightarrow a \leq 0$

14.4

$$-x^2-2x+ax+2a=-0{,}5x \quad \Rightarrow -x^2-1{,}5x+ax+2a=0$$

$$\Rightarrow D=(-1{,}5+a)^2-4(-1)(2a)=a^2-3a+2{,}25+8a=a^2+5a+2{,}25$$

$$\Rightarrow a^2+5a+2{,}25=0 \quad \Rightarrow a_1=-0{,}5 \qquad a_2=-4{,}5$$

$$\Rightarrow a=-0{,}5: \quad BP(-1/0{,}5)$$

$$\Rightarrow a=-4{,}5: \quad BP(-3/1{,}5)$$

Skizze von $a^2+5a+2{,}25$:

$\Rightarrow a \in \left]-4{,}5;-0{,}5\right[$ keine gemeinsamen Punkte

$\Rightarrow a \in \left]-\infty;-4{,}5\right[\cup \left]-0{,}5;\infty\right[$ zwei gemeinsame Punkte

15.1 $(k-1)\cdot 0^2-2k\cdot 0+k+3=0 \quad \Rightarrow k-3$

15.2

$$(k-1)x^2-2kx+k+3=0$$

$$\Rightarrow D=(-2k)^2-4(k-1)(k+3)=4k^2-4k^2-8k+12=-8k+12$$

$$\Rightarrow -8k+12=0 \quad \Rightarrow k=1{,}5$$

$\Rightarrow k=1{,}5$: eine Nullstelle

Skizze von $-8k+12$:

$\Rightarrow k \in \left]-\infty;1{,}5\right[$: zwei Nullstellen

$\Rightarrow k \in \left]1{,}5;\infty\right[$: keine Nullstellen

16 $\quad S\left(2|2k-1\right) \quad 2k-1<0 \quad \Rightarrow k<\frac{1}{2}$